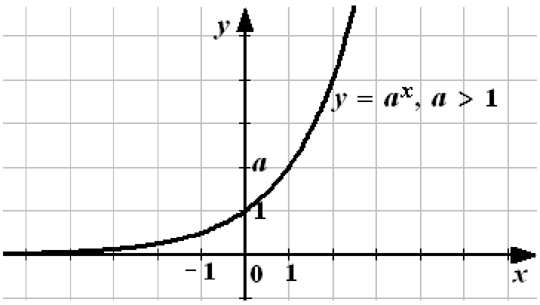
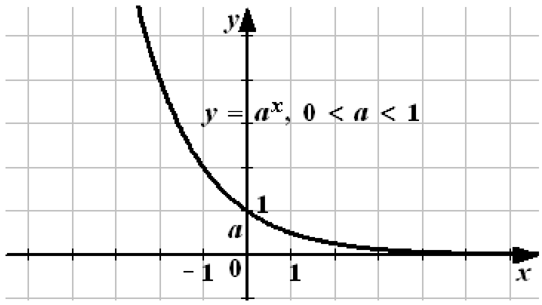
Показательная функция

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называют показательной с основанием а.

Свойства показательной функции:

1. а) $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$; б) $E(a^x) = (0; +\infty)$
2. а) нулей не имеет;
   б) точка пересечения с осью ординат (0; 1), т. к. $y(0) = a^0 = 1$.
3. а) при $a > 1$ функция возрастает на всей области определения;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения.
4. Экстремумов нет.
5. График функции:

а) 

б) 

6. а) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
   б) $a^n : a^m = a^{n-m}$;
   в) $(a^n)^m = a^{nm}$;
   г) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
   д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n$.

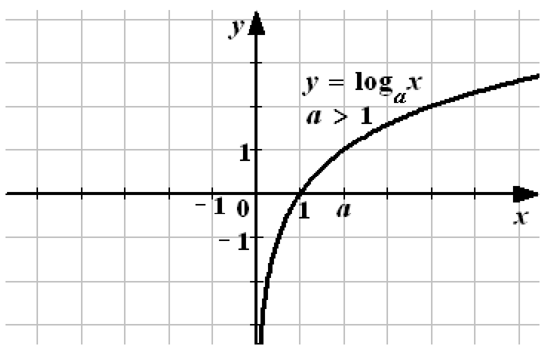
<u>Производная показательной функции:</u> $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(e^x)' = e^x$.

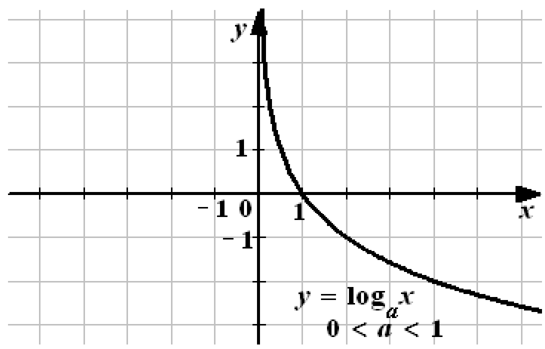
Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называют логарифмической с основанием а.

Свойства логарифмической функции:

1. а) $D(\log_a x) = (0; +\infty)$; б) $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$.
2. а) нули функции (1; 0);
   б) точек пересечения с осью ординат нет.
3. а) при $a > 1$ функция возрастает на всей области определения;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения.
4. Экстремумов нет.
5. График функции:

а) 

б) 

Логарифмическая функция

Логарифмом положительного числа b по положительному и не равному единице основанию a называется показатель степени, в который нужно возвести число a, чтобы получить b.

$\log_a b = c,\ a^c = b$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$

$a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1$;
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k}$;
5. $\log_a a^m = m$;
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k}$;
7. $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$;
8. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$;
9. $\log_{c^k} b = \frac{1}{k}\log_c b$;
10. $\log_c b^m = m\log_c b$;
11. $\log_{c^k} b^m = \frac{m}{k}\log_c b$;
12. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
13. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
14. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$;
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Производная логарифмической функции: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Десятичный логарифм: $\log_{10} a = \lg a$

Натуральный логарифм: $\log_e a = \ln a$

$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$

Сравнение логарифмов:

1. Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ *(Знак неравенства меняется).*
2. Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ *(Знак неравенства не меняется).*
3. Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.
4. Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.
5. Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.
6. Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.
7. $\log_a b > 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по одну сторону от единицы»: $a > 0,\ b > 0$ и $(a-1)(b-1) > 0$.
8. $\log_a b < 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по разные стороны от единицы»: $a > 0,\ b > 0$ и $(a-1)(b-1) < 0$.