Подготовил учитель математики
МБОУ Виткуловская СШ
Сосновского района Нижегородской области:
Бодров С.Б.

Решение задач с параметрами

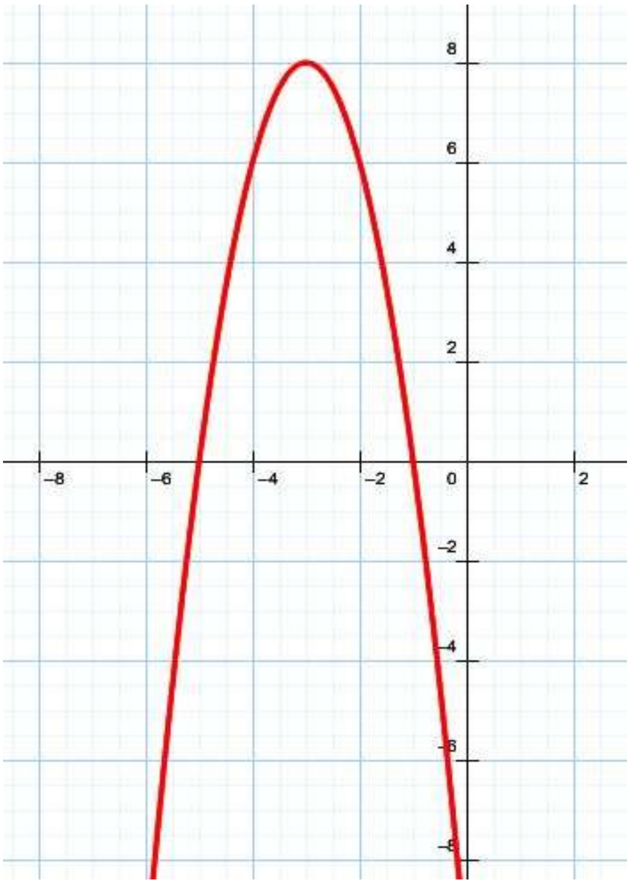
1. Действительные числа x и y таковы, что $\begin{cases} x+y=2a+2 \\ xy=3a^2+10a+7 \end{cases}$. Найти наименьшее значение суммы x^2+y^2.

Решение.
Из уравнений системы следует:

$(x+y)^2 = 4a^2+8a+4, \qquad 2xy = 6a^2+20a+14.$

Заметим, что:
$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4a^2+8a+4-6a^2-20a-14 = -2a^2-12a-10.$

Рассмотрим функцию $y=-2a^2-12a-10$, это квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вниз



Следовательно, данная функция (а значит и выражение x^2+y^2) на множестве действительных чисел не имеет наименьшего значения, а наибольшее значение принимает в вершине параболы $x_0 = -\frac{-12}{2\cdot(-2)} = -3.$

Согласно теореме Виета, x и y являются корнями квадратного уравнения:

$$t^2 - 2(a+1)t + (3a^2 + 10a + 7) = 0,$$

для которого $\frac{D}{4} = a^2 + 2a + 1 - 3a^2 - 10a - 7 = -2a^2 - 8a - 6.$

По условию числа x и y действительные, следовательно, $\frac{D}{4} \geq 0$, т.е. $-2a^2 - 8a - 6 \geq 0 |: (-2)$

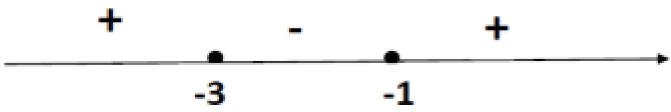
$$a^2 + 4a + 3 \leq 0$$

(метод интервалов)

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

$$a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$$

$$a_1 = -3, \quad a_2 = -1$$



$$-3 \leq a \leq -1$$

Т.к. при $a \geq -3$ функция $y = -2a^2 - 12a - 10$ убывает, то с учетом промежутка $-3 \leq a \leq -1$, наибольшее значение (а, значит, и наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$) достигается при $a = -3$ и равно: $-2 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8$; а наименьшее – при $a = -1$ и равно: $-2 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 10 = 0$

Ответ: наименьшее значение равно 0, а наибольшее равно 8.

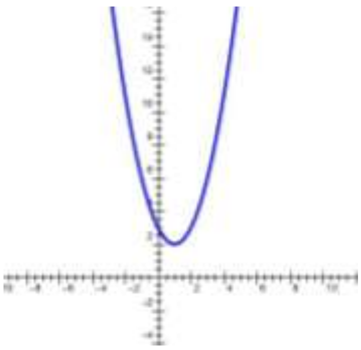
2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $2x^2 - 4ax - a^2 - a - 2 > 0$ выполняется при всех значениях x, таких, что $|x| \leq 1$.

Решение.

Пусть $f(x) = 2x^2 - 4ax - a^2 - a - 2$, тогда для данного квадратного трехчлена

$$\frac{D}{4} = 4a^2 + 2(a^2 + a + 2) = 6a^2 + 2a + 4.$$

Если $\frac{D}{4} < 0$, то эскиз графика функции будет выглядеть так:



и указанное в условии задачи неравенство выполняется при любом значении переменной x, и в частности при условии $|x| \leq 1$, т.е. на отрезке $[-1; 1]$.

Следовательно, все решения неравенства $6a^2 + 2a + 4 < 0$ удовлетворяют условию задачи.

Найдем их:

$$6a^2 + 2a + 4 = 0 |: 2$$

$$3a^2 + a + 2 = 0$$

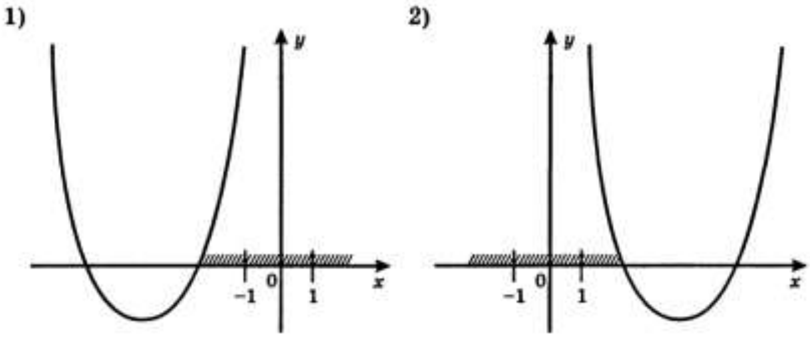
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

видим, что действительных корней нет, значит, парабола $y = 6a^2 + 2a + 4$ не пересекает ось ОХ, причем ветви ее направлены вверх (6>0), поэтому эскиз графика будет выглядеть так же, как на рис. выше, и, следовательно, неравенство $6a^2 + 2a + 4 < 0$ не имеет решений.

Из эскиза графика понятно, что $6a^2 + 2a + 4 > 0,$ т. е. $\frac{D}{4} > 0$ для любых значений a.

Таким образом, для любых $a \in \mathbb{R}$, выполнено неравенство $\frac{D}{4} > 0$, и, значит, трехчлен $f(x)$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2.

Условие задачи означает, что на координатной прямой оба корня лежат или не правее точки -1, или не левее точки 1



Этим двум условиям соответствуют системы неравенств:

$\begin{cases} x_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$

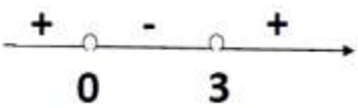
где $x_0 = -\frac{-4a}{2 \cdot 2} = a$ - абсцисса вершины параболы $f(x) = 2x^2 - 4ax - a^2 - a - 2$.

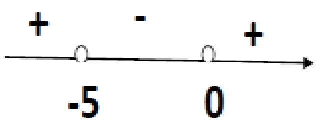
Имеем:

$\begin{cases} a < -1 \\ -a^2 + 3a > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a > 1 \\ -a^2 - 5a > 0 \end{cases}$

$a^2 - 3a < 0$ $\qquad$ $a^2 + 5a < 0$

$a(a - 3) < 0$ $\qquad$ $a(a + 5) < 0$





$0 < a < 3$ $\qquad$ $-5 < a < 0$

$\begin{cases} a < -1 \\ 0 < a < 3 \end{cases}$

решений нет

$\begin{cases} a > 1 \\ -5 < a < 0 \end{cases}$

решений нет

Вывод: не существует таких значений параметра a, при которых неравенство $2x^2 - 4ax - a^2 - a - 2 > 0$ выполняется при всех значениях x, таких, что $|x| \le 1$.

<u>Ответ:</u> таких a не существует.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(xy - x - y) + x - y + \dfrac{3}{2} = 0 \\ xy + y - 1 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

<u>Решение.</u>

1) Из второго уравнения системы имеем:

$xy = 1 - y;$

$y = \dfrac{1}{x+1}$ (гипербола)

2) Подставим найденное значение для xy в первое уравнение системы:

$a(1 - y - x - y) + x - y + \dfrac{3}{2} = 0$

$a - ax - 2ay + x - y + \dfrac{3}{2} = 0$

$(-2a - 1)y = ax - x - a - \dfrac{3}{2}$

$(-2a - 1)y = (a - 1)x - (a + \dfrac{3}{2})$

$y = \dfrac{1 - a}{2a + 1}x + \dfrac{a + 1{,}5}{2a + 1}$ (прямая)

3) Найдем те значения параметра a, при которых прямая $y = \frac{1-a}{2a+1}x + \frac{a+1{,}5}{2a+1}$ и гипербола $y = \frac{1}{x+1}$ пересекаются в одной точке:

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1 - a}{2a + 1}x + \dfrac{a + 1{,}5}{2a + 1}$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x - ax + a + 1{,}5}{2a + 1}$

если $x \neq -1,\ a \neq -\frac{1}{2}$ имеем:

$2a + 1 = (x + 1)(x - ax + a + 1{,}5)$

$2a + 1 = x^2 - ax^2 + ax + 1{,}5x + x - ax + a + 1{,}5$

$(1 - a)x^2 + (a + 1{,}5 + 1 - a)x + (0{,}5 - a) = 0$

$(1 - a)x^2 + \dfrac{5}{2}x + \left(\dfrac{1}{2} - a\right) = 0$

<u>1 случай.</u> Если a=1, то имеем линейное уравнение: $\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, откуда $x = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{5} \neq -1$(т.е. при a=1 уравнение имеет единственный корень, значит, гипербола и парабола пересекаются в

одной точке, а это в свою очередь свидетельствует о том, что исходная система уравнений при указанном значении a будет иметь единственное решение).

<u>2 случай.</u> Посмотрим, что произойдет, если $a = -\frac{1}{2}$. В этом случае получим квадратное уравнение $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0| \cdot 2$

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{6} = \frac{-5\pm1}{6}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

видим, что первое значение получилось недопустимое для переменной x, следовательно, этот случай нам тоже подходит.

<u>3 случай.</u> Квадратное уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант $D = 0$, т.е.

$$\frac{25}{4} - 4(1-a)\left(\frac{1}{2} - a\right) = 0$$

$$\frac{25}{4} - (1-a)(2-4a) = 0$$

$$\frac{25}{4} - 2 + 4a + 2a - 4a^2 = 0| \cdot 4$$

$$17 + 24a - 16a^2 = 0$$

$$16a^2 - 24a - 17 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 17}}{16} = \frac{12 \pm \sqrt{416}}{16} = \frac{12 \pm \sqrt{16 \cdot 26}}{16} = \frac{12 \pm 4\sqrt{26}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{26}}{4}$$

два найденных значения параметра а удовлетворяют условию $a \neq -\frac{1}{2}$, а также требованию исходной системы уравнений в целом.

Таким образом, при $a = \frac{3\pm\sqrt{26}}{4}$ система уравнений имеет единственное решение.

<u>**Ответ:**</u> $a = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = \frac{3\pm\sqrt{26}}{4}$.