Подготовил учитель математики

МБОУ Виткуловская СШ

Сосновского района Нижегородской области:

Бодров С.Б.

Решение заданий второй части ЕГЭ: №14 и №16 (геометрия)

1. Дана плоскость $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1$. Найти расстояние от начала координат до плоскости и угол, который она составляет с осью OX.

Решение.

Уравнение плоскости запишем в виде:

$x-y+2z-2=0$

1) Расстояние от т. M(x_0; y_0; z_0) до плоскости ax+by+cz+d=0 вычисляется по формуле

$$\rho=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

В нашей задаче вместо т. M имеем т. O(0;0;0).

Тогда $\rho=\frac{|1\cdot0-1\cdot0+2\cdot0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

2) Пусть $\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости ax+by+cz+d=0 , тогда $\vec{n}\{a;b;c\}$;

$\vec{\imath}\{1;0;0\}$ - единичный вектор оси OX $\Longrightarrow$

если α – угол между осью OX и заданной плоскостью, то:

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{\imath}}\right)\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{\imath}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{\imath}|}$$

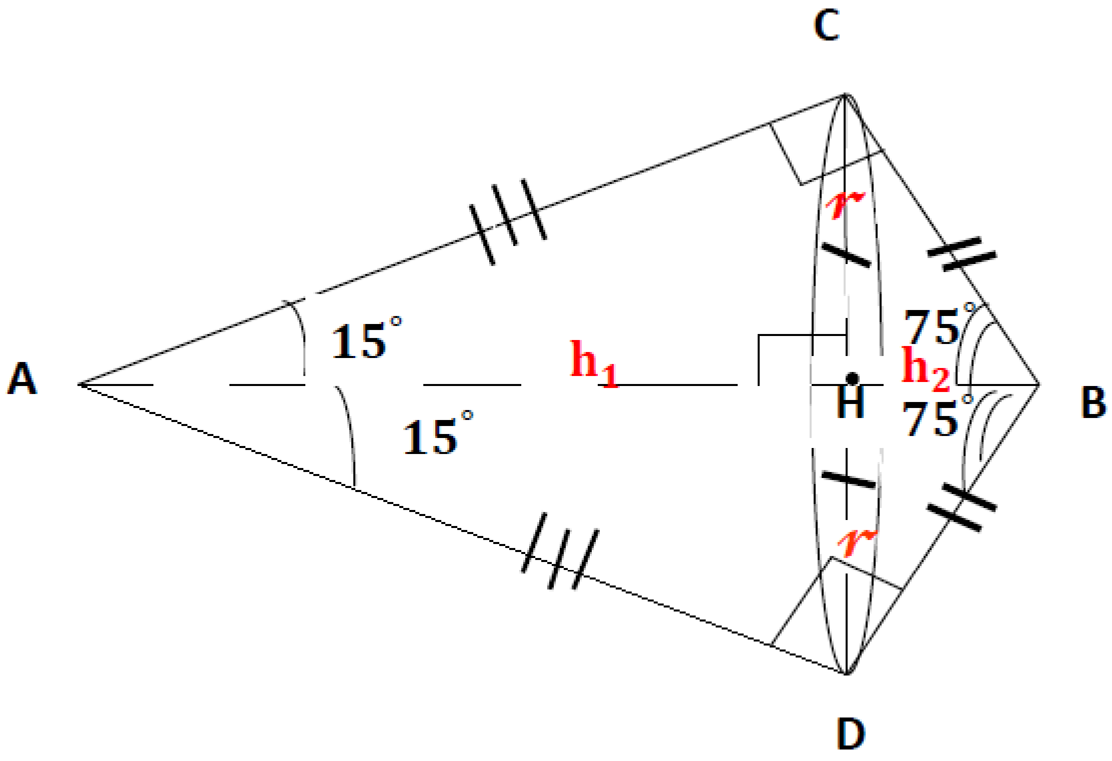
Для нашего случая $\vec{n}\{1;\,-1;2\}$, $\vec{\imath}\{1;0;0\}$, поэтому

$$\sin\alpha=\frac{|1\cdot1+0\cdot(-1)+0\cdot2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,$$

$$\alpha=arc\sin\frac{1}{\sqrt{6}}=arc\sin\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\quad arc\sin\frac{1}{\sqrt{6}} = arc\sin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. Прямоугольный треугольник с острым углом 15^0 и площадью $72 см^2$ вращается вокруг гипотенузы. Найти объём тела вращения.



$$S_{\Delta ABC} = 72 см^2, \quad V_{тела\ вращения} = ?$$

Решение.

1) Тело, которое получится в результате такого вращения, состоит из двух конусов.
2) Найдем объем тела. Т.к. здесь два конуса, то общий объем равен сумме объемов обоих конусов, у которых общее основание – круг радиуса $r = CH$

$$V_{тела} = V_{бол.кон.} + V_{мал.кон.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h_1 + \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h_2 = \frac{1}{3}S_{осн.}(h_1 + h_2) == \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot AB,$$

где AB – гипотенуза ΔABC

3) Из ΔCAD по теореме косинусов имеем:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\cos 30^\circ$,

пусть AC=AD=x, тогда

$$CD^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x^2 - x^2\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)x^2$$

4) Из ΔCBD по теореме косинусов имеем:

$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD\cos 150^\circ$,

пусть BC=BD=y, тогда

$$CD^2 = 2y^2 - 2y^2\cos(180^\circ - 30^\circ) = 2y^2(1+\cos 30^\circ) = 2y^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2y^2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} = \left(2+\sqrt{3}\right)y^2$$

5) Из пп. 3 и 4 $\Longrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)x^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)y^2 / \cdot \frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)y^2} \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2+\sqrt{3}$$

6) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BC, \qquad \frac{1}{2}xy = 72 \Rightarrow xy = 144$

7) Из пп. 5 и 6 $\Longrightarrow \begin{cases} xy = 144 \\ \frac{x}{y} = 2+\sqrt{3} \end{cases}$

выразим x из второго уравнения системы: $\quad x = \left(2+\sqrt{3}\right)y \quad (*)$

подставим в первое уравнение: $\quad \left(2+\sqrt{3}\right)$yy=144

$$y^2 = \frac{144}{2+\sqrt{3}}$$

$$y^2 = 144\left(2-\sqrt{3}\right)$$

из $(*) \Rightarrow x^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 y^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \cdot 144\left(2-\sqrt{3}\right) = 144\left(2+\sqrt{3}\right)$

8) $AB^2 = AC^2 + BC^2 = x^2 + y^2 = 144\left(2+\sqrt{3}\right) + 144\left(2-\sqrt{3}\right) = 144\left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right) = 144 \cdot 4 \Rightarrow$

AB=24

9) Из пп. 3 и 7 $\Longrightarrow \mathrm{CD}^2 = \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot 144\left(2+\sqrt{3}\right) \Longrightarrow \mathrm{CD}^2 = 144 \Longrightarrow \mathrm{CD} = 12 \Longrightarrow$

$$CH = HD = \frac{1}{2}CD = 6$$

10) $\qquad S_{\text{осн.}} = \pi r^2, \quad S_{\text{осн.}} = \pi \cdot CH^2 = 36\pi$

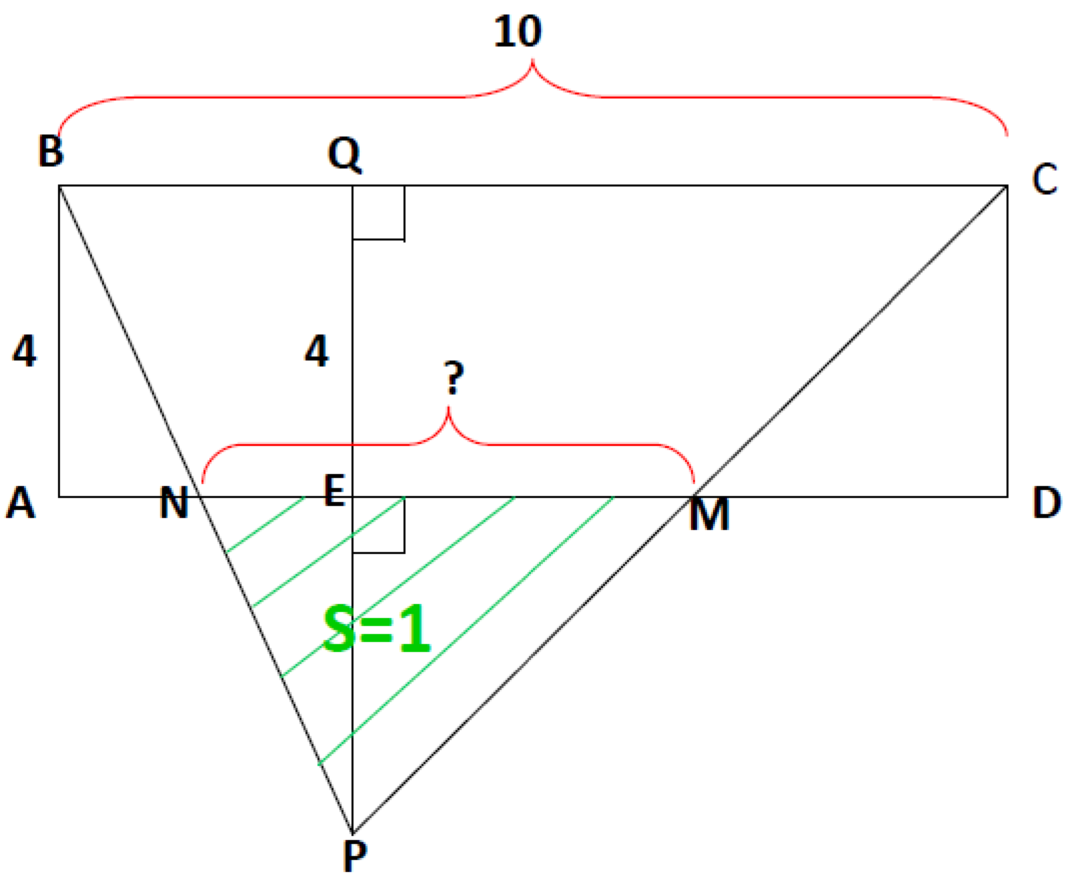
11) $\qquad$ Из пп. 2, 8 и 10 $\Longrightarrow V_{\text{тела}} = \frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 24 = 288\pi$

Ответ: 288π см^3

3. В прямоугольнике ABCD со сторонами AB = 4 и BC = 10 на стороне AD расположены точки M и N, при этом P – точка пересечения прямых BN и CM. Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N.

Решение.

1 случай



1) $\Delta BPC \sim \Delta NPM$ (по I признаку, т. е. по двум глам) $\Longrightarrow \frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta NPM}} = \left(\frac{BC}{NM}\right)^2 = k^2$,

$$\frac{S_{\Delta BPC}}{1} = \left(\frac{10}{NM}\right)^2 \Longrightarrow S_{\Delta BPC} = \frac{100}{NM^2}$$

2) Пусть PE=x ⇒ PQ=4+x

3) С др. стороны, $S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (4 + x) = 5(4 + x)$

4) $S_{\triangle NPM} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot PE$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot x$$

$$NM = \frac{2}{x}$$

5) Из пп. 1 и 4 $\Longrightarrow S_{\triangle BPC} = \frac{100}{\frac{4}{x^2}} = \frac{100 \cdot x^2}{1 \cdot 4} = 25x^2$

6) Из пп. 3 и 5 $\Longrightarrow 5(4 + x) = 25x^2$

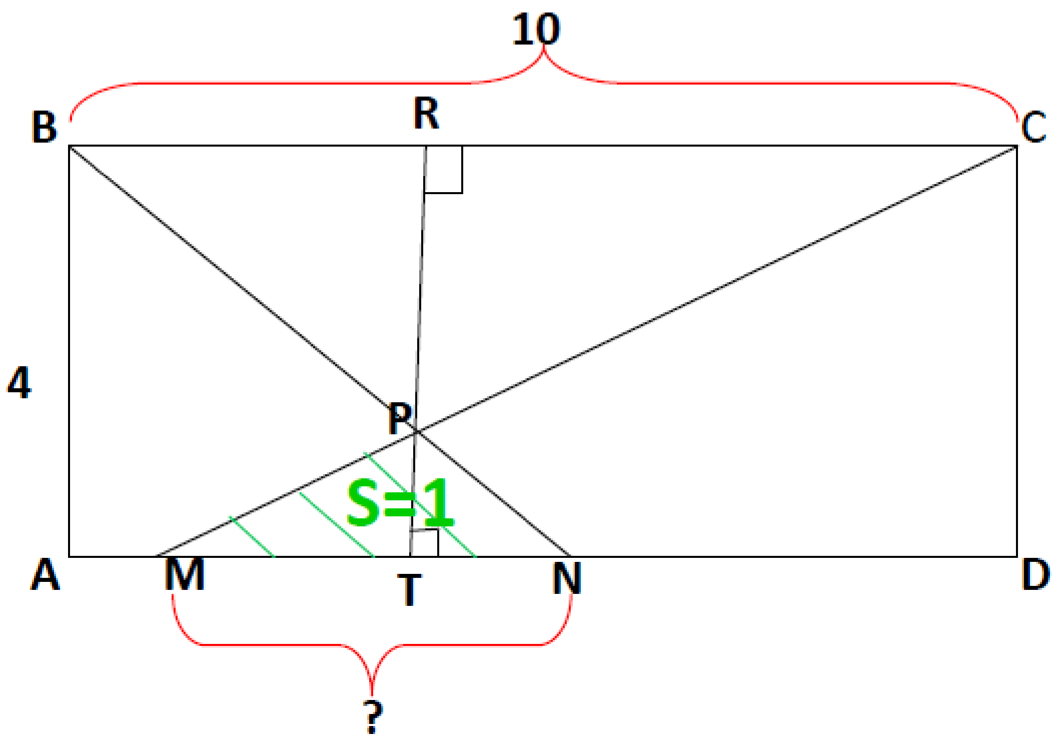
$$4 + x = 5x^2$$

$$5x^2 - x - 4 = 0$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -0{,}8$ (не подходит по смыслу задачи)

следовательно, $NM = \frac{2}{x}, \quad NM = 2$

<u>2</u> <u>случай</u>



1) $\Delta BPC \sim \Delta NPM$ (по I признаку, т. е. по двум глам) $\Longrightarrow \frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta NPM}} = \left(\frac{BC}{NM}\right)^2 = k^2$,

$$\frac{S_{\Delta BPC}}{1} = \left(\frac{10}{NM}\right)^2 \Longrightarrow S_{\Delta BPC} = \frac{100}{NM^2}$$

2) Пусть PT=y $\Rightarrow$ PR=4-y

3) С др. стороны, $S_{\Delta BPC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (4-y) = 5(4-y)$

4) $S_{\Delta NPM} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot PT$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot y$$

$$MN = \frac{2}{y}$$

5) Из пп. 1 и 4 $\Longrightarrow S_{\Delta BPC} = 100 : \frac{4}{y^2} = 25y^2$

6) Из пп. 3 и 5 $\Rightarrow 5(4-y) = 25y^2$

$$4 - y = 5y^2$$

$$5y^2 + y - 4 = 0$$

$$y_1 = \frac{4}{5}, \qquad y_2 = -1 \text{ (не подходит по смыслу задачи)}$$

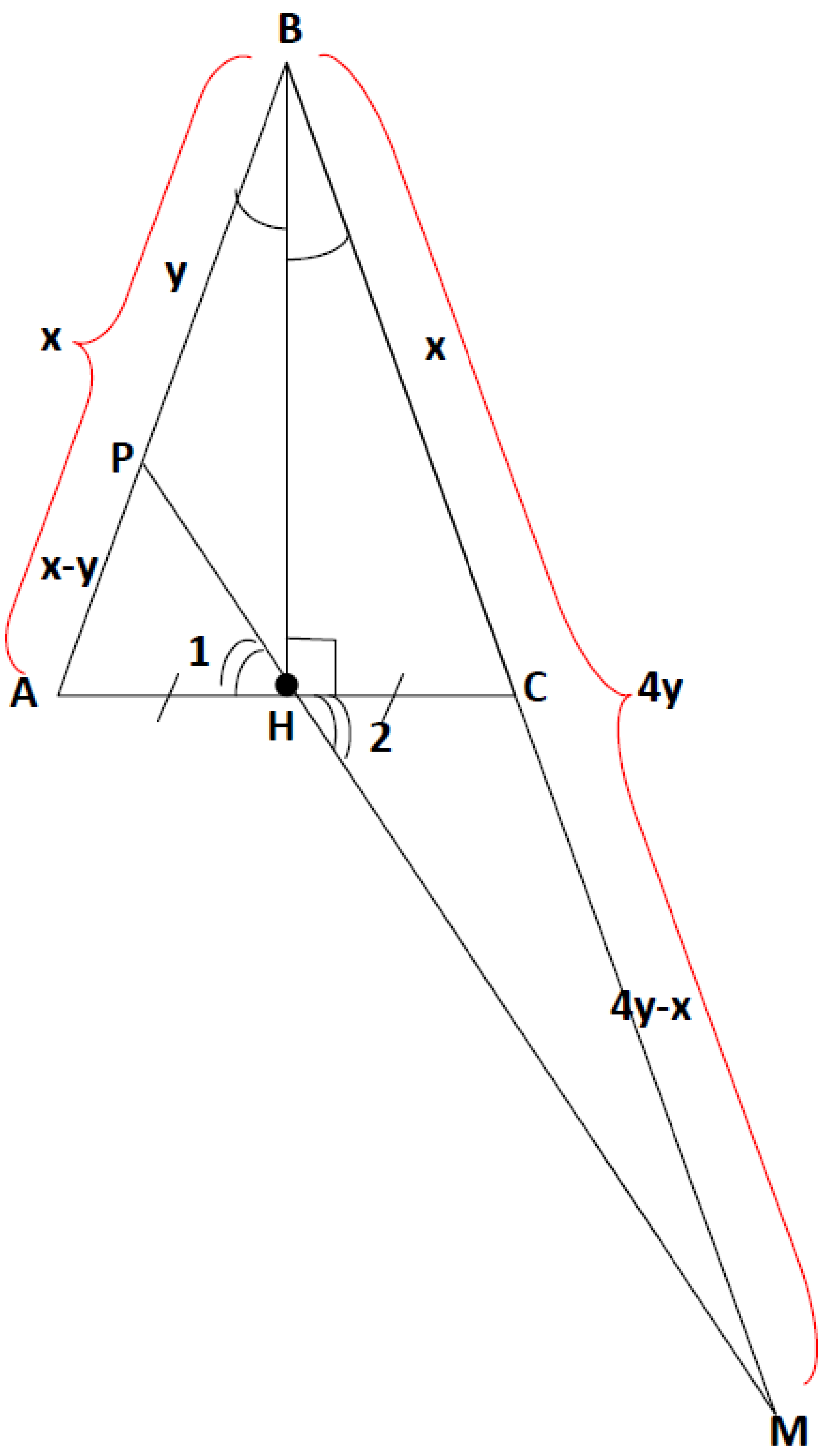
следовательно, $\quad MN = \frac{2}{y}, \quad MN = 2 : \frac{4}{5} = 2{,}5$

<u>Ответ:</u> 2 или 2,5.

4. **В равнобедренном треугольнике ABC через середину основания AC - точку H проведена прямая, пересекающая AB в точке P и BC в точке M; BM : BP = 4, площадь треугольника ABC равна 16. Найдите площадь треугольника BPM.**

<u>Решение.</u>

<u>1 случай</u>



1) Пусть AB=BC=x
2) BM:BP=4 ⇒ BM=4BP,

пусть BP=y, то BM=4y

3) $\angle B$ – общий угол для треугольников ABC и BPM $\Longrightarrow$

$$\frac{S_{\Delta BPM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{BP\cdot BM}{AB\cdot BC},\quad \frac{S_{\Delta BPM}}{16}=\frac{y\cdot 4y}{x\cdot x}=\frac{4y^2}{x^2}\Longrightarrow S_{\Delta BPM}=\frac{64y^2}{x^2}$$

4) $\angle A$ –общий угол для треугольников PAH и ABC $\Longrightarrow$

$$\frac{S_{\Delta PAH}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AP\cdot AH}{AB\cdot AC},\qquad \frac{S_{\Delta PAH}}{16}=\frac{(x-y)\cdot AH}{x\cdot 2AH}\Longrightarrow\quad S_{\Delta PAH}=\frac{8(x-y)}{x}$$

5) BH – биссектриса $\Delta BPM \Longrightarrow \frac{PH}{PB}=\frac{HM}{BM}\Longrightarrow \frac{PH}{y}=\frac{HM}{4y}/\cdot\frac{y}{HM}\Longrightarrow \frac{PH}{HM}=\frac{1}{4}$

6) В треугольниках PAH и MHC $\quad \angle 1=\angle 2\ (\text{как верт.})\Longrightarrow$

$$\frac{S_{\Delta PAH}}{S_{\Delta MHC}}=\frac{PH\cdot AH}{CH\cdot HM}\Rightarrow\quad \frac{\frac{8(x-y)}{x}}{S_{\Delta MHC}}=\frac{PH}{HM}=\frac{1}{4}\ (\text{т. к.}\ AH=HC)\Rightarrow S_{\Delta MHC}=\frac{32(x-y)}{x}$$

7) $S_{\Delta BPM}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta PAH}+S_{\Delta MHC}$

$$\frac{64y^2}{x^2}=16-\frac{8(x-y)}{x}+\frac{32(x-y)}{x}$$

$$\frac{64y^2}{x^2}=16-\left(8-\frac{8y}{x}\right)+\left(32-\frac{32y}{x}\right)$$

$$\frac{64y^2}{x^2}=16-8+\frac{8y}{x}+32-\frac{32y}{x}$$

$$\frac{64y^2}{x^2}-\frac{8y}{x}+\frac{32y}{x}=40$$

$$\frac{64y^2}{x^2}+\frac{24y}{x}=40/:8$$

$$\frac{8y^2}{x^2}+\frac{3y}{x}=5$$

$$8\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\cdot\frac{y}{x}-5=0$$

пусть $\frac{y}{x}=t$, тогда:

$8t^2 + 3t - 5 = 0$

$t_1 = -1, \qquad t_2 = \frac{5}{8}$

т. к. $\frac{y}{x} = t$, то:

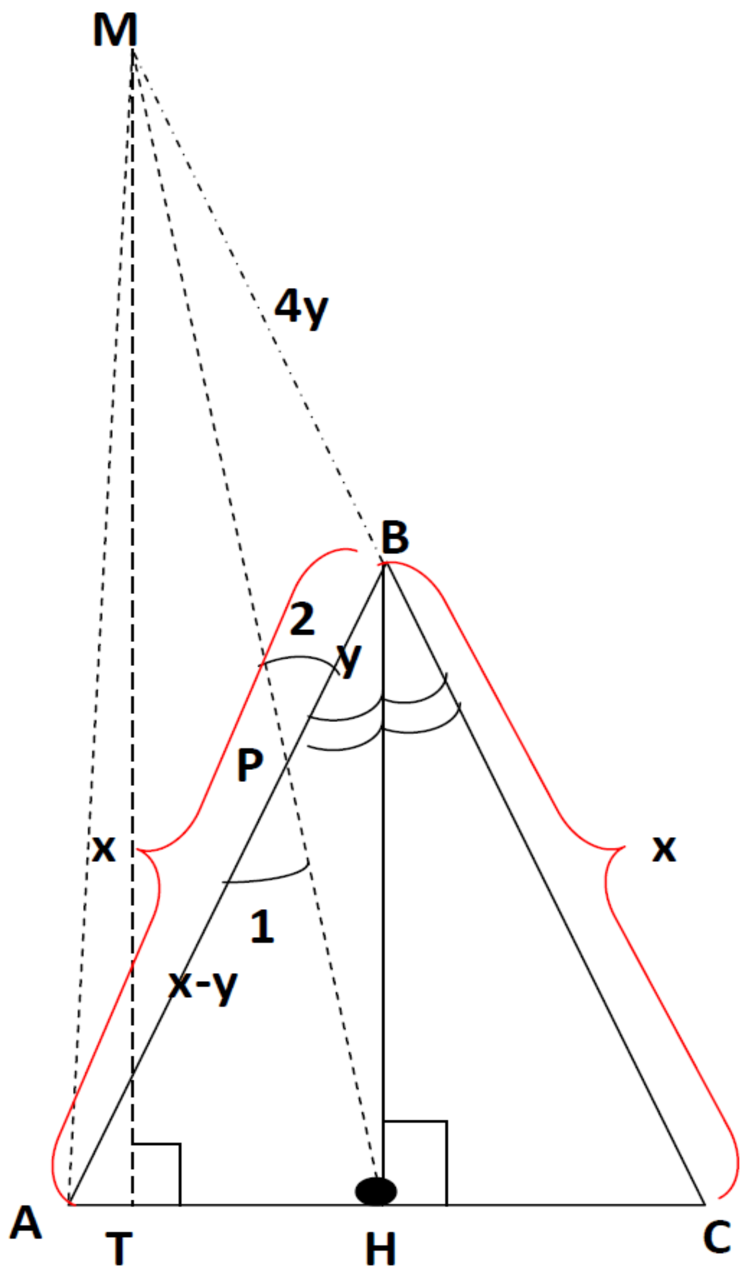
1) $\frac{y}{x} = -1$ (не подходит по смыслу задачи, т. к. $x > 0, y > 0$)

3) $\frac{y}{x} = \frac{5}{8}$ $/\cdot 8$

$\frac{8y}{x} = 5$

$\frac{64y^2}{x^2} = 25 = S_{\Delta BPM}$

<u>2 случай</u>



1) Пусть AB=BC=x
2) BM:BP=4 ⇒ BM=4BP,

пусть BP=y, то BM=4y

3) $\angle C -$ общий для треугольников ABC и MCH $\Rightarrow \frac{S_{MCH}}{S_{ABC}} = \frac{MC \cdot CH}{BC \cdot AC}$, $\frac{S_{MCH}}{16} = \frac{(x+4y) \cdot CH}{x \cdot 2CH}$,

$$S_{MCH} = \frac{8(x+4y)}{x}$$

4) $\angle A -$ общий для треугольников ABC и APH $\Rightarrow \frac{S_{APH}}{S_{ABC}} = \frac{AP \cdot AH}{AB \cdot AC}$, $\frac{S_{APH}}{16} = \frac{(x-y) \cdot AH}{x \cdot 2AH}$,

$S_{APH} = \frac{8(x-y)}{x}$

5) $\angle M -$ общий для треугольников BMP и MHC $\Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{MHC}} = \frac{PM \cdot MB}{HM \cdot CM}$,

$\frac{S_{BMP}}{\frac{8(x+y)}{x}} = \frac{PM \cdot 4y}{HM \cdot (x+4y)}$, $\frac{x \cdot S_{BMP}}{8(x+4y)} = \frac{4y}{x+4y} \cdot \frac{PM}{HM} \Rightarrow \frac{PM}{HM} = \frac{x \cdot S_{BMP}}{32y} \Rightarrow \frac{HM}{PM} = \frac{HP+PM}{PM} = \frac{HP}{PM} + 1 = \frac{32y}{x \cdot S_{BMP}} \Rightarrow \frac{HP}{PM} = \frac{32y}{x \cdot S_{BMP}} - 1$

6) $\angle 1 = \angle 2$ (как верт) $\Rightarrow \frac{S_{APH}}{S_{BPM}} = \frac{AP \cdot PH}{MP \cdot BP}$, $\frac{\frac{8(x-y)}{x}}{S_{BPM}} = \frac{(x-y) \cdot PH}{MP \cdot y}$, $\frac{8(x-y)}{x \cdot S_{BPM}} = \frac{(x-y) \cdot PH}{y \cdot MP} / \cdot \frac{y}{x-y} \Rightarrow$

$$\frac{8y}{x \cdot S_{BPM}} = \frac{PH}{MP}$$

7) Из пп. 5 и 6 $\Rightarrow \frac{32y}{x \cdot S_{BMP}} - 1 = \frac{8y}{x \cdot S_{BPM}} \Rightarrow 32y - x \cdot S_{BPM} = 8y \Rightarrow S_{BPM} = \frac{24y}{x}$

8) $\angle ABM -$ общий угол треугольников BMP и ABM⇒

$\frac{S_{BMP}}{S_{ABM}} = \frac{BM \cdot BP}{AB \cdot BM}$, $\frac{S_{BMP}}{S_{ABM}} = \frac{y}{x}$, $\frac{\frac{24y}{x}}{S_{ABM}} = \frac{y}{x}$, $S_{ABM} = 24$

9) MT – общая высота для треугольников AMH и CMH⇒

$\frac{S_{AMH}}{S_{CMH}} = \frac{AH}{HC}$, $\frac{S_{AMH}}{\frac{8(x+4y)}{x}} = 1$ (т.к. $AH = HC$) $\Rightarrow S_{AMH} = \frac{8(x+4y)}{x}$

10) $S_{APM} = S_{AMH} - S_{APH} = \frac{8(x+4y)}{x} - \frac{8(x-y)}{x} = \frac{40y}{x}$

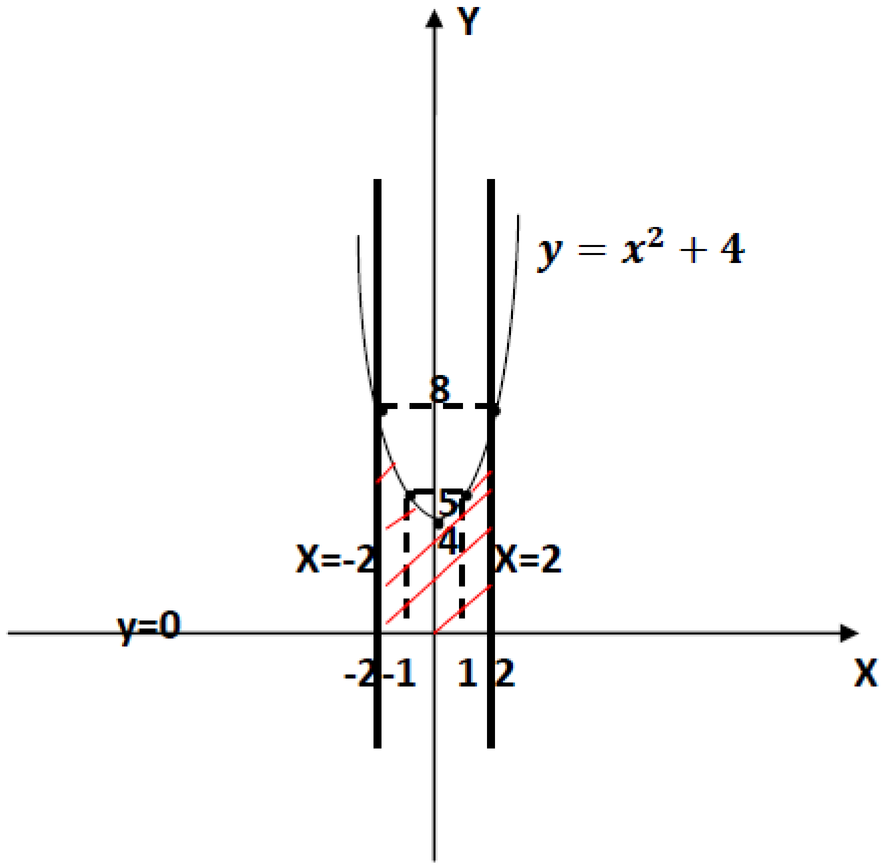
11) $S_{BMP} = S_{ABM} - S_{APM}$, $\frac{24y}{x} = 24 - \frac{40y}{x}$, $\frac{64y}{x} = 24 /: 8$, $\frac{8y}{x} = 3 / \cdot 3 \Rightarrow$

$$\frac{24\text{y}}{\text{x}} = 9 = \text{S}_{\text{BMP}}$$

Ответ: 25 кв.ед. или 9 кв.ед.

5. Найти ординату центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2 + 4$**,** $y = 0$**,** $x = -2$**,** $x = 2$**.**

Решение.



1) Найдем площадь криволинейной трапеции:

$$S_{\text{крив.трап.}} = \int_{-2}^{2} (x^2 + 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)|_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{64}{3}$$

2) Найдем объем тела вращения вокруг оси OX:

$$V_x = \pi \int_{-2}^{2} (x^2+4)^2\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^4+8x^2+16)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{8x^3}{3}+16x\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \pi\cdot 2\cdot\left(\frac{32}{5}+\frac{64}{3}+32\right) = 2\pi\cdot\frac{96+320+480}{15} = \frac{1792\pi}{15}$$

3) Таким образом, получаем ординату центра тяжести:

$$V = 2\pi\cdot y_c\cdot S \implies y_c = \frac{V}{2\pi S}$$

$$2\pi S = 2\pi\cdot\frac{64}{3} = \frac{128\pi}{3}$$

$$y_c = \frac{1792\pi\cdot 3}{15\cdot 128\pi} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

<u>Ответ:</u> 2,8